

MMNS

Matěj Popdákunik

11. října 2024

1 Mandelbrot

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad (1)$$

Pro $z_n \rightarrow 0$ jde o Juliovy množiny

Obecněji

$$z_{n+1} = F(z_n) \quad (2)$$

2 Úvod do teorie dynamických systémů

Poznámka. Použijeme metrické prostory $X = (X, \varrho)$ kde X je množina a $\varrho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je metrika. tj

1. $(\forall x, y \in X)(\varrho(x, y) = \varrho(y, x))$
2. $(\forall x, y \in X)(\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
3. $(\forall x, y, z \in X)(\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z))$

Pak také $(\forall x, y \in X)(\varrho(x, y) \geq 0)$

Definice 2.1. Necht na X je dán soubor zobrazení $\{S(t)\}_{t \in \square}$ takový, že

1. $(\forall t \in \square)(S(t) : X \rightarrow X \text{ je spojitý})$
2. $S(0) = Id$ (identita)
3. $(\forall s, t \in \square)(S(t+s) = S(t) \circ S(s))$

Pak $\{S(t)\}_{t \in \square}$ se nazývá **dynamický systém**

- pro $\square = \mathbb{R}$ **invertovatelný**
- pro $\square = \mathbb{R}_0^+$ **neinvertovatelný**
- pro $\square = \mathbb{Z}$ **diskrétní**

Poznámka.

0. $S(t)$ je spojitý na $X : (\forall x_0 \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, \varrho(x, x_0) < \delta)(\varrho(S(t)x, S(t)x_0) < \varepsilon)$
1. Smysl $S(t)$ je vývoj počátečního stavu $x_{ini} \in X$ v čase $t \in \square : S(t)x_{ini}$, t má roli času
2. $S(0) = Id$ znamená: $S(0)x_{ini} = x_{ini}$
3. Podmínka 3: pro $x_{ini} \in X$, pro $t, s, t+s \in \square : S(t+s)x_{ini} = S(t)[S(s)x_{ini}]$

4. Pak pro $\square = \mathbb{R}$: zvolme $t \in \mathbb{R}$ a pak $-t \in \mathbb{R} \implies$ platí podmínka 3 :

$$S(0) = S(t + (-t)) = S(t) \circ S(-t) = S((-t) + t) = S(-t) \circ S(t) = Yd \quad (3)$$

Z toho máme $S(-t) = [S(t)]^{-1}$

Pro $\square = \mathbb{Z} \implies \text{pro } k \in \mathbb{Z}$ je

$$\begin{aligned} S(k)x_{ini} &= \{\text{Dle bodu 3}\} = S(k-1)[S(1)x_{ini}] \quad (\text{Zatím } \text{pro } k \in \mathbb{N}) = \dots = \\ &= S(1)[S(1)[\dots S(1)x_{ini}]] = [S(1) \circ S(1) \circ S(1) \circ \dots \circ S(1)]x_{ini} \stackrel{\text{ozn.}}{=} S(1)^{[k]} \end{aligned} \quad (4)$$

Pro $k < 0$ označme $S(1)^k = ([S(1)]^{-1})^{[|k|]}$

Pro $k = 0$ označme $S(1)^{[k]} = Yd$

Definice 2.2. Necht X je metrický prostor, $\{S(t)\}_{t \in \square}$ je dynamický systém na X . Pak:

1. X se nazývá fázový prostor
2. Pro $x_0 \in X$ množina $\{S(t)x_0\}_{t \in \square}$ se nazývá **trajektorie** procházející bodem $x_0 \in X$
3. Bod $x^* \in X$, pro který $S(t)x^* = x^*, \forall t \in \square$, se nazývá **pevný bod** dynamického systému
4. Množina $A \subset X$, pro kterou $S(t)A = A, \forall t \in \square$, se nazývá **invariantní**
5. Pevný bod $x^* \in X$ je **stabilní**, pokud $\left(\forall H_{x^*}^{(1)} \text{ okolí}\right) \left(\exists H_{x^*}^{(2)} \text{ okolí}\right) \left(\forall x_0 \in H_{x^*}^{(2)}\right) \left(\forall t \in \square, t > 0\right) \left(S(t)x_0 \in H_{x^*}^{(1)}\right)$
6. Pevný bod $x^* \in X$ je **nestabilní**, pokud není stabilní
7. Pevný bod $x^* \in X$ je asymptoticky stabilní, pokud je stabilní a navíc $\left(H_{x^*}^{(3)} \text{ okolí}\right) \left(\forall x_0 \in H_{x^*}^{(3)}\right) \left(S(t)x_0 \xrightarrow[\square \rightarrow t, t \rightarrow \infty]{} x^*\right)$

Definice 2.3. Pro zkrácení zápisu místo okolí budeme psát $\in \mathcal{J}_X$, přesný vzhled záleží na topologii.

Příklad. Zadání je:

$$\dot{x} = ax, a \in \mathbb{R}, x(0) = x_0 \quad (5)$$

Řešení má tvar $x(t) = e^{ta}x_0, t \in \mathbb{R}$, pak $X = \mathbb{R}, S(t) = e^{ta}$. Ověříme

1. $S(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jako násobení je spojitý
2. $S(0) = 1 \implies S(0) = Yd$
3. $S(s+t) = e^{(s+t)a} = e^{sa}e^{ta} = S(s)S(t) = S(s) \circ S(t)$

Z toho dostáváme že zadání generuje dynamický systém na $\mathbb{R}$

Příklad. Zadání je

$$\dot{x} = \mathbb{A}x, \mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}, x(0) = x_0 \quad (6)$$

Řešení je $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a má tvar $x(t) = e^{t\mathbb{A}}x_0, t \in \mathbb{R}$, kde $e^{t\mathbb{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t\mathbb{A})^k$.
Z toho máme, že $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$. Ověříme že se jedná o dynamický systém

1. $S(T)$ je spojitý, neboť $S(t)$ funguje jako násobení matice a vektoru což je spojitá operace
2. $S(0) = \mathbb{I}$, což je identita na $\mathbb{R}^n$
3. $S(s+t) = S(s) \circ S(t)$, dle vlastnosti $e^{(s+t)\mathbb{A}} = e^{s\mathbb{A}}e^{t\mathbb{A}}$

Příklad. Zadání je

$$\dot{x} = 1 + x^2, x(0) = x_0 \quad (7)$$

To je separovatelná rovnice s řešením

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(t)dt}{1 + (x(t))^2} = \int_0^t 1dt \quad (8)$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{1 + y^2} = t \quad (9)$$

$$\arctan(x(t)) - \arctan(x_0) = t \quad (10)$$

tedy

$$x(t) = \tan(t + \arctan(x_0)), x_0 \in \mathbb{R} \implies \arctan(x_0) \in (-\pi/2, \pi/2) \quad (11)$$

Z toho máme maximální rozsah $t \in (-\frac{\pi}{2} - \arctan(x_0), \frac{\pi}{2} - \arctan(x_0))$.

Zadání tedy negeneruje dynamický systém.

Příklad. Hénonův atraktor

$$x_{n+1}^1 = x_n^2 + 1 - a(x_n^1)^2, x_{n+1}^2 = bx_n^1 \quad (12)$$

Navíc $a = 1.4, b = 0.3$

Generujeme posloupnost $\left\{ \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \end{pmatrix} \right\}_{n=1}^{\infty} \text{ v } \mathbb{R}^2$, tj $X = \mathbb{R}^2$

Diskretní dynamický systém

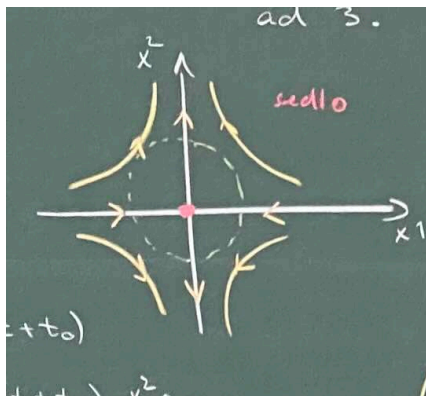
1. $F \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 1 - a(x^1)^2 \\ bx^1 \end{pmatrix}$ je spojitý.
2. $F[0] = Yd$
3. $F^{[m+n]} = F^{[m]} \circ F^{[n]}$

Příklad. Použijeme příklad 2 (ten s maticí) pro $n = 2$, tj. $X = \mathbb{R}^2$

1. Nejdříve vezměme matici

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Tedy $\dot{X}^1 = -x^1$ a $\dot{x}^2 = x^2$ s řešením $x^1(t) = e^{-t}x_0^1$ a $x^2(t) = e^t x_0^2$

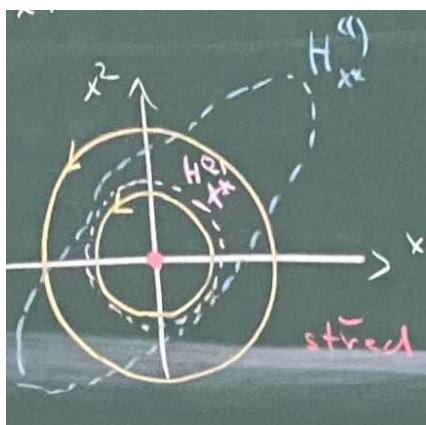


Tedy máme $\mathbb{A} = X$ je invariantní, osy x^1 a x^2 je invariantní a pevný bod $x^* = [0, 0]$ je nestabilní.

2. Nyní vezměme matici

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Tedy $\dot{X}^1 = -x^2$ a $\dot{x}^2 = x^1$ s řešením $x^1(t) = r_0 \cos(t + t_0)$ a $x^2(t) = r_0 \sin(t + t_0)$



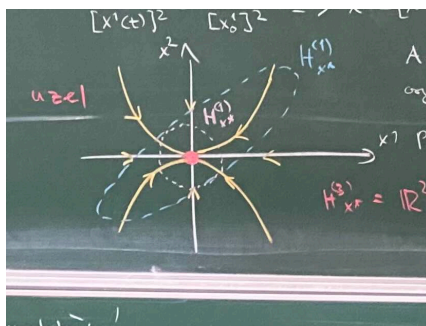
Máme pevný bod $x^* = [0, 0]$, $A = X$ je invariantní.

3. Nyní vezměme matici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Tedy $\dot{X}^1 = -x^1$ a $\dot{x}^2 = -2x^2$ s řešením $x^1(t) = e^{-t}x_0^1$ a $x^2(t) = e^{-2t}x_0^2$

Po úpravách dostáváme $\frac{x^2(t)}{(x^1(t))^2} = \frac{x_0^2}{(x_0^1)^2}$ a proto $x^2 = (x^1)^2 \frac{x_0^2}{(x_0^1)^2}$

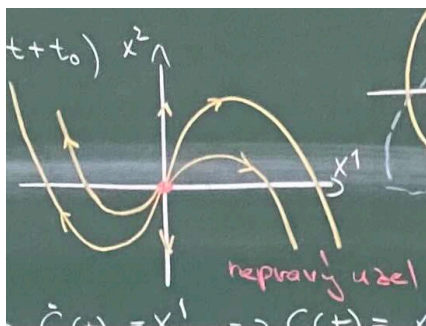


$A = X$ je invariantní, osy x^1, x^2 jsou invariantní, máme pevný bod $x^* = [0, 0]$

4. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Tedy $\dot{X}^1 = -x^1$ a $\dot{x}^2 = x^1 + x^2$ s řešením $x^1(t) = e^t x_0^1$ a $x^2(t) = (x_0^1 t + x_0^2) e^t$

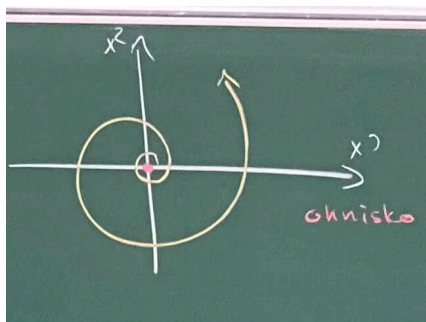


Pevný bod $x^* = [0, 0]$ je nestabilní

5. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Tedy $\dot{X}^1 = x^1 - x^2$ a $\dot{x}^2 = x^1 + x^2$ s řešením $x^1(t) = r_0 e^t \cos(t + t_0)$ a $x^2(t) = r_0 e^t \sin(t + t_0)$



Pevný bod $x^* = [0, 0]$ je nestabilní

Definice 2.4. Trajektorie z předchozího příkladu pojmenujeme

1. Sedlo
2. Střed
3. Uzel
4. Nepravý uzel
5. Ohnisko

Definice 2.5. Necht x^* je pevný bod dynamického systému na X . Pak množina

$$\mathcal{M}_-(x^*) = \left\{ x_0 \in X \mid S(t)x_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x^* \right\}$$
 se nazývá **stabilní varieta**.

Množina

$$\mathcal{M}_+(x^*) = \{x_0 \in X \mid (\exists \text{ úplná trajektorie } \{u(t)\}_{t \in \mathbb{R}}) \\ (\exists t_0 \in \mathbb{R})(x_0 = u(t_0) \wedge u(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} x^*)\}$$

se nazývá **nestabilní varieta**.

Necht $A \subset X$ je invariantní a

$$(\exists B_0 \subset X, B_0 \in \mathcal{J}_x, B_0 \supset A) (\forall x_0 \in B_0) \left(\varrho(S(t)x_0, A) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \right)$$

pak A se nazývá **atraktor**.

Poznámka. Trajektorie $\{u(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ je úplná, když je parametrizovaná $\forall t \in \mathbb{R} (t \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Z})$, tj t lze $\left(\begin{smallmatrix} \rightarrow +\infty \\ \rightarrow -\infty \end{smallmatrix} \right)$. To **neznamená**, že diskretní systém musí být invertovatelný.

Atraktory jsou asymptoticky stabilní pevné body a mnohem více (viz. dále).

Příklad. Nekonečně rozměrný dynamický systém:

$$\partial_t u = D \partial_{xx}^2 u, v(0, \infty) \times (a, b) \quad (18)$$

Okrajové podmínky $u|_{\bar{x}=a} = 0, u|_{\bar{x}=b} = 0$ a počáteční podmínky $u|_{t=0} = u_{ini}(\bar{x})$ v (a, b)

ÚKOL: zapsat analytické řešení ve tvaru řady a určit, jaký DS generuje.

Pro usnadnění provedeme transformaci $x = \bar{x} - a$ Transformované okrajové podmínky jsou $u|_{x=0} = 0, u|_{x=b-a} = 0$

Řešíme pomocí separace proměnných.

$$u(x, t) = S(t)T(x) \quad (19)$$

Rovnice je pak

$$T(x) \frac{dS(t)}{dt} = \frac{d^2 T(x)}{dx^2} S(t) \quad (20)$$

Upravíme

$$\frac{T(x)}{\frac{d^2 T(x)}{dx^2}} = \frac{S(t)}{\frac{dS(t)}{dt}} \quad (21)$$

Levá strana závisí pouze na x , levá pouze na t , proto se obě strany rovnají nějaké konstantě C .

Z pravé strany máme

$$\frac{dS(t)}{dt} = CS(t) \quad (22)$$

Z toho dostáváme

$$S(t) = Ae^{Ct} \quad (23)$$

Z levé strany máme

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} = CT(x) \quad (24)$$

Řešením je

$$T(x) = b_1 e^{\sqrt{C}x} + b_2 e^{-\sqrt{C}x} \quad (25)$$

Z okrajových podmínek víme, že $T(a) = T(b) = 0$.

Pokud je $C \geq 0$, úloha má řešení pouze pro $u = 0$. Proto $C < 0$. Přeznačme $\alpha := -C$

Z toho dostáváme

$$T(x) = a_1 \sin(\sqrt{\alpha}x) + a_2 \cos(\sqrt{\alpha}x) \quad (26)$$

Dosadíme okrajovou podmínku $u|_{x=0} = 0$ a máme

$$T(x) = a_1 \sin(\sqrt{\alpha}x) \quad (27)$$

Z druhé okrajové podmínky máme

$$T(x) = a_1 \sin\left(n \frac{\pi}{b-a} x\right) \quad (28)$$

, kde n je celé číslo.

Tedy $\alpha = n \frac{\pi}{b-a}$

Celkově dostáváme řešení módů:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n \frac{\pi}{b-a} x) \exp(-\frac{n^2 \pi^2 t}{(b-a)^2}) \quad (29)$$

kde koeficienty C_n se dostaly rozvojem počáteční podmínky do Fourierovy řady.

Provedme zpětnou transformaci $\bar{x} = x + a$

$$u(\bar{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n \frac{\pi}{b-a} (\bar{x} - a)) \exp(-\frac{n^2 \pi^2 t}{(b-a)^2}) \quad (30)$$

Řada diverguje pro $t < 0$, dynamický systém je neinvertovatelný.

3 Konečně-rozměrné dynamické systémy generované ODR

3.1 Úloha 1

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x(0) = x_{ini} \quad (31)$$

,kde $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ je oblast, $f : \Gamma \mapsto \mathbb{R}^n$, $f \in C^{(3)}(\Gamma)$ a $x_{ini} \in \Gamma$

Stuff

Věta 3.1 (Liouville). Necht platí pro 3.1 předpoklady (z) a navíc $f \in C^{(3)}(\Gamma)$ a $M \subset \Gamma$ je měřitelná a $\mu(M) < \infty$.

change to link

Pak

$$\frac{d}{dt} (\mu(\Phi_t(M)))|_{t=0} = \int_M \operatorname{div} f(x) dx \quad (32)$$

Důkaz.

$$\mu(\Phi_t(M)) = \int_{\Phi_t(M)} 1 dy = \{\text{substituce } y = \Phi_t(x)\} = \int_M 1 |\mathcal{Y}| dx \quad (33)$$

Výpočet jakobiánu

$$|\mathcal{Y}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial(\Phi_t(x))^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial(\Phi_t(x))^n}{\partial x^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial(\Phi_t(x))^1}{\partial x^n} & \dots & \frac{\partial(\Phi_t(x))^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} \quad (34)$$

Pro t z okolí 0 a $\hat{x} \in \Gamma$:

$$\Phi_t(\hat{x}) = \Phi_0(\hat{x}) + t \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_t(\hat{x}))|_{t=0} + \frac{1}{2} t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Phi_t(\hat{x}))|_{t=0} + R_3(t, \Phi_t(\hat{x})) \quad (35)$$

zde

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi_t(\hat{x})) = f(\Phi_t(\hat{x})) \quad (36)$$

a

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Phi_t(\hat{x})) = \frac{\partial}{\partial t}(f(\Phi_t(\hat{x}))) = f'(\Phi_t(\hat{x}))\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_t(\hat{x})) = f'(\Phi_t(\hat{x}))f(\Phi_t(\hat{x})) \quad (37)$$

Rovnici (35) derivujeme podle složek $\hat{x}$

□