

Teorie Grafů

Matěj Popdákunik

8. listopadu 2023

Obsah

1	Algoritmy na grafech	5
1.1	Nejmenší kostra/ Minimum Spanning Tree/ MST	6
1.2	Hledání nejkratší cesty	6
2	Bipartitní grafy	6
2.1	Eulerovský tah	9
2.2	Hamiltonovské kružnice	10
3	Robustní souvislost	10
3.1	Operace zachovávající neseparovatelnost	10
4	K-souvislost	11
1.	domácí úlohy	12
1)		12
2)		12
3a)		13
3b)		14
4)		14
5)		15
2.	domácí úlohy	18
1a)		18
1b)		19
2a)		19
2b)		20
3a)		21
3b)		21
4)		23
5)		24

3. domácí úlohy	25
1a)	25
1b)	25
2)	27
3)	28
4)	29
4a)	29
4b)	29
5a)	30
5b)	31
4. domácí úlohy	32
1a)	32
1b)	33
2)	33
Těžká úloha 3	35
Zadání a)	35
Řešení a)	35
Těžká úloha 4	38
Zadání	38
Řešení	38

Definice 0.1. Neorientovaný prostý graf $G = (V, E)$

V konečná množina vrcholů

$$E \subseteq \binom{V}{2}$$

E množina hran

$\binom{V}{2}$ množina všech neuspořádaných dvojic z V

Často $|V| = n$,
často $V = [n]$, kde $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$

Definice 0.2. Necht $G = (V, E)$, pak definujeme

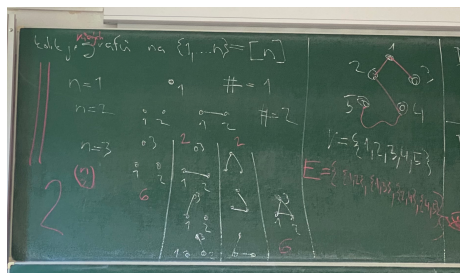
$$E(G) = E$$

$$V(G) = V$$

Definice 0.3. Pro graf $G = (V, E)$ definujeme doplněk $\bar{G} := \tilde{G}$ je graf $(V, \binom{V}{2} \setminus E)$

Definice 0.4. Nulový graf $G = (\emptyset, \emptyset)$

Příklad. Kolik je různých grafů na $[n]$?



Na obrázku vidíme různý počet grafů

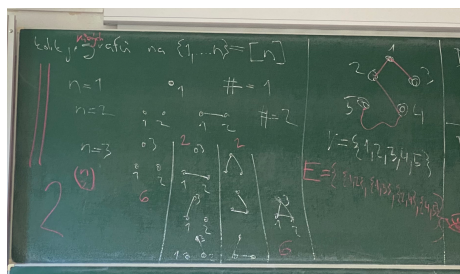
Poté co se zamyslíme tak vidíme, že jich je obecně $2^{\binom{n}{2}}$

Definice 0.5. $G = (V, E)$ a $H = (W, F)$ jsou isomorfní, jestliže existuje bijekce $f: V \mapsto W$, ($|V| = |W|$) tak, že $\forall u, v \in V: \{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in F$

Definice 0.6. f je automorfismus jestliže jde o isomorfismus mezi G a G

Poznámka. $Aut(G) = \{f | f \text{ je automorfismus } G\}$ je grupa

Příklad. Kolik je navzájem neisomorfních grafů s n vrcholy?



Každá "kategorie" grafů je jeden isomorfismus

Není vzorec, musí se počítat, existují horní a dolní odhady.

Tvrzení 0.1. Dolní odhad počtu navzájem neisomorfních grafů s n vrcholy je alespoň

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \geq \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n^n} \approx \frac{2^{\frac{n^2}{2}}}{2^{n \log(n)}} \approx 2^{(\frac{1}{2}-\epsilon)n^2} \quad (1)$$

Důkaz. Označme g_n jako množinu všech neisomorfních grafů na $[n]$

$$2^{\binom{n}{2}} = \sum_{g_n} \frac{n!}{|Aut(G)|} \leq n! |g_n|$$

□

Tvrzení 0.2. (Bez důkazu)

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0$$

$$|g_n| \leq (1 + \epsilon) \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$$

Definice 0.7. Pro graf $G = (V, E)$ a vrchol $v \in V$ Označme

$N_G(v) := \{x \in V : \{x, v\} \in E\}$, prvkům říkáme sousedé v
 $|N_G(v)| = \deg_G(v)$, stupeň

Tvrzení 0.3. $\sum_{v \in V} \deg(v)$ je sudé číslo

Důkaz. $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$

□

Definice 0.8. $G = (V, E)$ graf, $v \in V, e \in E$: v je incidentní s e , jestliže $s \in e$
 $e \in E, f \in E$, e je incidentní s f jestliže $|e \cap f| = 1$

Definice 0.9. Sled v grafu G

Alternující posloupnost vrcholů a hran, např $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$

Definice 0.10. tah v grafu G , sled $\forall i \neq j \implies e_i \neq e_j$

Definice 0.11. cesta v G , sled $\forall i \neq j \implies v_i \neq v_j$

Definice 0.12. sled v G je z u do w jestliže $\exists$ sled, $u = v_0 e_1 \dots e_k v_k = w$

Cesta v G je z u do w jestliže $\exists$ sled z u do w tak že se žádný vrchol nevyskytuje dvakrát.

Tvrzení 0.4. Buď $G = (V, E)$ graf a $u, w \in V$ jeho dva vrcholy. Následující dvě tvrzení jsou potom ekvivalentní.

1. Existuje sled v G z vrcholu u do w
2. Existuje cesta v G z vrcholu u do w

Chybí z 4.10.

Definice 0.13. $G = (V, E)$ je strom pokud

1. Souvislý graf bez cyklů
2. Každé 2 vrcholy spojeny právě jednou cestou
3. Souvislý, každý tah je cesta
4. maximální $\subseteq$ vůči hranám, bez cyklů
5. Každá hrana je most a je souvislý
6. souvislý, $|E| = |V| - 1$

Definice 0.14. G je les pokud je G bez cyklů (chybí podmínka souvislosti)

Věta 0.1. Definice stromu 1-6 jsou ekvivalentní.

Důkaz. Ponecháno čtenáři. □

Definice 0.15. Graf $G = (V, E)$, $v \in V$ je list jestliže $\deg_G(v) = 1$

Lemma 0.1.1. Každý strom T s ≥ 2 vrcholy obsahuje ≥ 2 listy

Definice 0.16. $\mathcal{T}_n :=$ počet stromů na $[n]$.

Věta 0.2 (Caley). $\mathcal{T}_n = n^{n-2}$

Důsledek 0.2.1. Neizomorfních stromů na n vrcholech $\geq \frac{n^{n-2}}{n!} \approx C \frac{e^n}{n} n^{n-2} \approx C \frac{e^n}{n^{\frac{5}{2}}}$

Věta 0.3. (Pro zajímavost) Počet Neizomorfních stromů s n vrcholy je asymptoticky $C \frac{e^n}{n^{\frac{5}{2}}}$. $\alpha \approx 2.956, C \approx 0.535$

Definice 0.17. $\mathcal{T}'_n =$ počet zakořeněných stromů (T, v) na $[n] = n\mathcal{T}$

1 Algoritmy na grafech

Poznámka. Souvislý $G = (V, E)$ a $T = (V, F)$ kostra G , pak platí $\forall e \in E \setminus F : T + e$ obsahuje 1 cyklus C_e^T

Definice 1.1. $G = (V, E)$ graf, $e \in \binom{V}{2} \setminus E$, $G + e$ značí graf $(V, E \cup \{e\})$

Definice 1.2. Cyklu C_e^T se říká fundamentální cyklus e v G vůči T .

Poznámka. Souvislý $G = (V, E)$, $T = (V, F)$ kostra, $e \in E \setminus F$. $\forall f \in E(C_e^T)$ platí, že $(T + e) - f$ je kostra G .

Definice 1.3. Vážený graf $G_W = (V, E, w)$ tak ,že (V, E) je graf, $w : E \mapsto \mathbb{R}$

1.1 Nejmenší kostra/ Minimum Spanning Tree/ MST

Pro daný vážený graf (souvislý), najdi kostru G nejmenší váhy.

”SMŮNO”(s malou úhonou na obecnosti) předpokládáme že w je prostá.

Tvrzení 1.1. Souvislý graf $G = (V, E)$ a $w : E \mapsto \mathbb{R}$ prostá. Potom (V, E, w) má právě jednu MST.

Kruskalův algoritmus

Vstup (V, E, w) , $|E| = m$, $|V| = n$

1. Seřaď E dle vah. $e_1, e_2, \dots, e_m$ tak, že $w(e_i) < w(e_{i+1}), \forall i$
2. $T^0 := \emptyset$
3. Pro $i = 1$ do m . Pokud $T^{i-1} + e_i$ cyklus? Pokud ano přeskočíme, jinak hranu přidáme.

1.2 Hledání nejkratší cesty

w nemusí být prostá ale musí být nezáporná.

Věta 1.1 (Dijkstra). $G = (V, E, w)$ vážený graf, $w : E \mapsto \mathbb{R}_0^+, s \in V$ potom existuje acyklický faktor $T_s = (V, F)$ tak, že $\forall v \in V, dist_G(s, v) = dist_{T_s}(s, v)$

Dijkstrův algoritmus. 1. $T^{(0)} := (\{s\}, \emptyset), i = 0$

2. Dokud $\exists e \in E$ napříč $V(T^{(i)})$ a $V \setminus V(T^{(i)})$

- (a) $e_i = \{x, y\} :=$ zvol tu hranu tak, že $x \in V(T^{(i)})$ a $y \notin V(T^{(i)})$ a výraz $dist_{T^{(i)}}(s, x) + w(e_i)$ je nejmenší množina
- (b) $T^{(i)} := (V(T^{(i)}) \cup \{y\}, E(T^{(i)}) \cup \{e_i\})$
- (c) $i := i + 1$

3. $T_S := (V, e_0, \dots, e_{i-1})$

□

2 Bipartitní grafy

Definice 2.1. $G = (V, E)$ graf je bipartitní, jestliže existuje rozklad $V = L \cup R$ tak, že $\forall e \in E : |e \cap L| = |e \cap R| = 1$

Poznámka. Stromy jsou bipartitní

Poznámka. Sudé cykly jsou bipartitní

Poznámka. Podgraf bipartitního grafu je bipartitní

Poznámka. Liché cykly nejsou bipartitní

Věta 2.1. G nemá lichý cyklus $\Leftrightarrow G$ je bipartitní

Definice 2.2. $G = (V, E)$, $W \subseteq V$ je nezávislá množina (independent set, stable set) v G , jestliže podgraf indukovaný W , neboli $(W, \binom{W}{2} \cap E)$ je bez hran, tzn $\forall e \in E, |e \cap W| \leq 1$

Věta 2.2. Bipartitní graf $\Leftrightarrow \exists L, R \subseteq V$, tak že L, R nezávislá $\wedge V = L \cup R$

Definice 2.3. Délka tahu je jeho počet hran

Definice 2.4. Tah je uzavřený jestli začíná a končí ve stejném vrcholu

Věta 2.3. Následující tvrzení jsou ekvivalentní

1. G bipartitní
2. G neobsahuje uzavřený tah liché délky
3. G neobsahuje indukovaný podgraf H který je izomorfní liché kružnici
4. G neobsahuje lichý cyklus jako podgraf

Důkaz. $1 \implies 2$

Spor $\exists$ uzavřený tah liché délky, když ale napíšeme jak by ten tah vypadal dostaneme spor

$2 \implies 3$ triviální

$3 \implies 4$

Pro spor: G obsahuje lichou kružnici jako indukovaný podgraf, mezi všemi vem tu s nejkratší délkou.

Tento graf rozdělíme třetivou. Tím ale vzniká nový indukovaný graf, který obsahuje lichou kružnici kratší délky.

$4 \implies 1$

BÚNO G je souvislý, T libovolná kostra G . Zvolme libovolný vrchol $s \in V$, L jsou vrcholy vzdálené o sudou vzdálenost, R o lichou.

Každý fundamentální cyklus je pak buď v pořádku nebo v rozporu s předpokladem. $\square$

Věta 2.4. $G = (V, E)$ graf obsahuje faktor $H = (V, F)$ tak, že $|F| \geq |E|/2$ a H je bipartitní.

Definice 2.5. Sudý faktor grafu $G = (V, E)$ je faktor H takový, že $\forall v \in V : \deg_H(v)$ je sudé.

Definice 2.6. Uvažme vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$ dimenze $m = |E|$ BÚNO $E = \{e_1 \dots e_m\}$.

$\vec{v} \in \mathbb{Z}_2^m \leftrightarrow_{1:1} F \subseteq E$, nazveme charakteristický vektor F

SBÚNO, G souvislý, T libovolná kostra G

$$\mathcal{C}_G := \{\vec{v}_F \in \mathbb{Z}_2^m : F \text{ sudý faktor}\}$$

Nazýváme ho prostorem cyklů

Tvrzení 2.1. $\mathcal{C}_G$ je vektorový podprostor $\mathbb{Z}_2^m$

Věta 2.5. $G = (V, E)$ souvislý graf, T kostra G , potom $C_1, C_2, \dots, C_{|E|-|V|+1}$ (všechny fundamentální cykly v T) tvoří bázi $\mathcal{C}_G$

Věta 2.6. $\forall G = (V, E)$ s alespoň jednou hranou, obsahuje indukovaný podgraf H s $\delta(H) > \frac{|E|}{|V|}$

(Průměrný stupeň $2|E|/|V|$)

Definice 2.7. Multigraf $G = (V, E_M)$ kde E_M je multimnožina (element tam může být i víckrát) obsahující prvky $\binom{V}{2}$

Alternativně

Definice 2.8. Vážený graf (V, E, w) , kde w je násobnost, $w : E \mapsto \mathbb{N}$.

Mezi těmito grafy existuje 1:1 korespondence.

Poznámka. V literatuře někdy mohou existovat existovat smyčky (hrana z vrcholu do sebe sama) to my neuvažujeme.

Definice 2.9. Multigraf $G = (V, E, w)$ je souvislý, pokud je graf (V, E) souvislý.

Definice 2.10. Pro multigraf $G = (V, E_M)$ definujeme počet koster $T(G) := \#F \subseteq E_M$ tak, že F je strom.

Definice 2.11. Kontrakce hrany (pro multigrafy! bez smyček)

Značíme G/e , multigraf po zkontrahování $e \in G$.

Výsledkem je multigraf $(V \setminus \{x, y\} \cup \{z\}, E_M^*)$, kde

1. $\{u, v\} \in E_M$ tak, že $\{u, v\} \cap \{x, y\} = \emptyset \Leftrightarrow \{u, v\} \in E_M^*$
2. $\{u, x\} \in E_M$ tak, že $u \neq y \Leftrightarrow \{u, z\} \in E_M^*$
3. $\{u, y\} \in E_M$ tak, že $u \neq x \Leftrightarrow \{u, z\} \in E_M^*$

včetně násobnosti.

Tvrzení 2.2. $T(G) = \# \text{ koster } G \text{ obsahující } e + \# \text{ koster } G \text{ neobsahujících } e = T(G/e) + T(G - e)$.

Definice 2.12. Matice sousednosti (adjacency matrix)

Multigraf $G = ([n], E_M)$

Matice $A_G \in \mathbb{N}^{n \times n}$, symetrická, na diagonále nuly. a_{ij} = násobnost hrany $\{i, j\}$

Tvrzení 2.3. $G = ([n], E_M)$ multigraf, A_G jeho matice sousednosti $\forall k \in \mathbb{N}_{>0}, i, j \in V$ platí, že $(A_G)^k$ je matice $n \times n$ kde na pozici i, j je počet sledů s k hranami v G z i do j .

Definice 2.13. Matice incidence grafu $G = ([n], E_M)$, $|E_M| = m$ je booleovská matice.

Matice o rozměru $n \times m$.

Sloupec odpovídá hraně e_i , řádek obsahuje 1 pokud hrana obsahuje vrchol j . Jinak 0.

Značí se jako B_G

Tvrzení 2.4. $G = (V, E)$ graf, λ_1 největší vlastní číslo jeho spektra (tj. matice A_G). δ je minimální stupeň vrcholů, Δ je maximální stupeň vrcholů.

Pak platí $\delta \leq \text{průměrný stupeň} \leq \lambda_1 \leq \Delta$

Definice 2.14. Laplaceova matice multigrafu $G = ([n], E_M)$.

Symetrická matice $L_G \in \mathbb{N}^{n \times n}$. Na diagonále má stupně vrcholů, $l_{ij} = -$ násobnosti hrany $\{i, j\}$

Tvrzení 2.5. L_G je singulární

Tvrzení 2.6. $L_G \geq 0$, tj, pozitivně semi-definitní.

Tvrzení 2.7. $G = ([n], E_M)$ multigraf je souvislý $\Leftrightarrow h(L_G) = n - 1$

Definice 2.15. $L_G^{(i)} :=$ matice získaná z L_G odstraněním i -tého řádku a sloupce.

Tvrzení 2.8. $L_G^{(i)}$ není L_{G-i}

Věta 2.7. $\forall i \in [n], \det L_G^{(i)} =$ počet koster multigrafu $G = [n, E_M]$

2.1 Eulerovský tah

Definice 2.16. Multigraf $G = (V, E_M)$ lze nakreslit jedním tahem $\Leftrightarrow \exists$ tah v G obsahující všechny prvky E_M

Definice 2.17 (příjemnější verze). Multigraf $G = (V, E_M)$ lze nakreslit jedním tahem $\Leftrightarrow \exists$ uzavřený tah

Tvrzení 2.9. Nutná podmínka $\exists E$ (Eulerovského tahu) $\implies$ stupeň je sudý a G je souvislý.

Věta 2.8 (Eulerova). Nutná podmínka je i postačující!

Důkaz. Buď T nejdelší (vůči počtu hran) tah v G .

Tvrdíme, že T musí být uzavřený tah. Pro spor předpokládejme, že není. Pak by koncový vrchol T je koncem lichého počtu hran T , avšak $\deg_G$ je sudý $\implies \exists f \notin T$ a $T + f$ je delší tah.

T obsahuje všechny hrany

Máme tah $T = v_0 e_1 v_1 \dots e_l v_l$ & $\exists f \in E_M \setminus T$. Protože graf je souvislý tak f souvisí s tahem, pokud bychom tah začali ve vrcholu který s ním souvisí, tak by byla delší cesta $\square$

Důsledek 2.8.1. G je souvislý a počet vrcholů lichého stupně je buď 0 nebo 2 $\Leftrightarrow \exists$ tah v G obsahující všechny hrany.

Důkaz. Spojíme hranou 2 vrcholy lichého stupně, z Eulerovy věty vytvoříme uzavřený tah, a přidání vrchol odstraníme. $\square$

2.2 Hamiltonovské kružnice

Definice 2.18. $G = (V, E)$ graf, s $|V| = n$. Řekneme, že G je Hamiltonovský, jestliže obsahuje kružnici s n vrcholy jako podgraf.

To je ekvivalentní s

Věta 2.9. $\exists \pi \in S_n$ (permutace V) tak, že $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ a $\{v_i, v_{i+1 \bmod n}\} \in E, \forall i \in [n]$

Věta 2.10 (Dirac). $G = (V, E), |V| = n \geq 3$ a minimální stupeň je $\geq \frac{n}{2} \implies G$ má Hamiltonovskou kružnici

Důkaz. Důsledek následující věty □

Věta 2.11 (ORE). $G = (V, E)$ graf s $|V| \geq 3$ tak, že $\forall u, v \in V$ které $\{u, v\} \notin E$ platí $\deg(u) + \deg(v) \geq |V|$ pak G má HC.

Tvrzení 2.10. $G = (V, E), \exists X \subseteq V$ s.t. $G - X$ má $> |X|$ komponent souvislosti $\implies G$ nemá HC.

3 Robustní souvislost

Definice 3.1. $G = (V, E), |V| \geq 3$ graf je neseparovatelný, jestliže je souvislý a $\forall v \in V, G - v$ je souvislý

To znamená, že nemá artikulaci.

Lemma 3.0.1. Buď $G = (V, E)$ souvislý graf s $|V| \geq 3$. Jestliže G obsahuje most $\implies \exists v \in V : G - v$ je nesouvislý.

Věta 3.1. G neseparovatelný $\Leftrightarrow \forall u, v \in V \exists$ cesty p_1, p_2 v G každá z u do w a $V(p_1) \cap V(p_2) = \{u, w\}$

3.1 Operace zachovávající neseparovatelnost

Přidání hrany.

Podrozdělení hrany, vezmi hranu a nahraď ji vrcholem a 2 hranami. Značíme $G : e$

Tvrzení 3.1. G je souvislý $\Leftrightarrow G : e$ je souvislý, $\forall e \in E(G)$

Lemma 3.1.1. G neseparovatelný $\Leftrightarrow G : e$ neseparovatelný

Důsledek 3.1.1. $G = (V, E)$ neseparovatelný graf, $e, f \in E$. Potom $\exists$ cyklus v G obsahující e i f .

Definice 3.2. $G = (V, E)$ relace na hranách $E: e \sim f \Leftrightarrow e = f$, nebo $\exists$ cyklus v G obsahující e i f .

Definice 3.3. Blok G = třída ekvivalence $\sim_B$

Definice 3.4. $G = (V, E)$ neseperovatelný graf, $u, w \in V, u \neq w$. Ucho délky 1.

1. $\{u, w\} \notin E$ přidej u, w hranu a podrozděl $(l - 1)$ -krát
2. $\{u, w\} \in E$ podrozděl $(l - 1)$ -krát hranu a pak ji přidej

Věta 3.2 (Ušaté lemma). $G = (V, E)$ neseperovatelný graf $\exists$ posloupnost $G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_t = G$, kde G_0 je cyklus délky 2, a G_{i+1} vzniklo přidáním ucha do G_i .

4 K-souvislost

Definice 4.1. Graf $G = (V, E)$ je (vrcholově) k -souvislý jestliže $\forall u, w \in V$ platí, že existuje k nezávislých disjunktních cest (až na konce) mezi nimi.

Definice 4.2. $\kappa(G) := \max_k k$ tak, že graf G je k -souvislý.

Definice 4.3. Separátor v grafu který **není** úplný.

$W \subseteq V$ tak, že $G[V \setminus W]$ je nespojitý.

Poznámka. k -souvislý $\implies |V| \geq k + 1$

Poznámka. k -souvislý graf G , $|W| \leq k - 1, \forall W \subseteq V(G) \implies G - W$ je souvislý.

Věta 4.1 (Menger (globální, vrcholový)). G k -souvislý $\Leftrightarrow |V(G)| \geq k + 1 \wedge \forall W \subseteq V, |W| \leq k - 1$ je $G - W$ souvislý.

Definice 4.4. Multigraf $G = (V, E_M), x, y \in V$

$$P'_G(x, y) := \max_k : \exists P_1 \dots P_k \text{ hranově disjunktních cest mezi nimi}$$

Definice 4.5. Hranová k -souvislost pro multigraf $\Leftrightarrow P'_G(x, y) \geq k, \forall x, y \in V$

Definice 4.6. $\kappa'(G) := \max_k k$ tak, že graf G je hranově k -souvislý.

Existuje Mengerova věta i tady.

Lemma 4.1.1. $G = (V, E)$ k -souvislý, $X \subseteq V, |X| \geq k$, přidáme vrchol v který je spojený s vrcholy v X , tj stupně alespoň k .

Pak je $G + v$ k -souvislý.

1. domácí úlohy

1)

Zadání

Graf nazvěme *asymetrickým* obsahuje-li jeho grupa automorfismů pouze identitu. Zkonstruuje nekonečně mnoho navzájem neisomorfních asymetrických grafů.

Řešení

Jako naši množinu neisomorfních asymetrických grafů vezměme množinu $\mathcal{G} = \{G_7, G_8, \dots\}$. G_n definujeme jako

$$G_n = ([n], \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \dots, \{n-1, n\}\})$$

Protože se jedná o grafy s různým počtem vrcholů neexistuje mezi nimi isomorfní zobrazení.

Ukažme, že se jedná o asymetrické grafy.

Aby zobrazení f bylo automorfismus, tak musí platit $f(1) = 1$, protože se jedná o jediný uzel stupně 3.

Dále určitě musí platit $f(2) = 2$, protože to je jediný uzel stupně 1, který je zároveň spojený s uzlem stupně 3.

Nakonec musí platit, že $f(3) = 3$ a $f(4) = 4$, protože uzel 4 musí sousedit s uzlem, který sousedí s uzlem stupně 3.

Podobné tvrzení tedy platí i pro uzly 5, ..., n . Tedy existuje pouze jedno zobrazení a to identita.

2)

Zadání

Pro daný graf $G = (V, E)$, uvažujme následující relaci $\rightsquigarrow$ na V : pro dva (ne nutně různé) vrcholy $u, v \in V$ řekneme, že u je v relaci s w , tzn. $u \rightsquigarrow w$, jestliže existuje cesta v G z u do w . Dokažte, že $\rightsquigarrow$ je ekvivalence na V

Řešení

Aby relace byla ekvivalencí, musí být reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Předpokládáme tedy graf $G = (V, E)$, $v_i \in V$, $e_j \in E$, kde $i, j \in [n+k]$.

Dokažme reflexivitu, tj. $\forall u \in V : u \rightsquigarrow u$.

Toto tvrzení platí triviálně, jako cestu volíme jednočlennou posloupnost (u) .

Dokažme symetrii, tj. $\forall u, w \in V : u \rightsquigarrow w \implies w \rightsquigarrow u$.

Předpokládáme tedy existenci cesty z u do w , tedy posloupnost

$$(u, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, w)$$

Zřejmě existuje cesta z w do u , stačí přetočit předchozí posloupnost, tedy

$$(w, e_{n-1}, v_{n-1}, \dots, v_1, e_1, w)$$

Nakonec dokažme tranzitivitu, tj. $\forall u, w, x \in V : u \rightsquigarrow w \wedge w \rightsquigarrow x \implies u \rightsquigarrow x$.
Existuje tedy cesta z u do w a cesta z w do x , tedy

$$(u, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, w)$$

$$(w, e_{n+1}, v_{n+1}, e_{n+2}, \dots, v_{n+k-1}, e_{n+k-1}, x)$$

Nejprve řešme triviální případ, kdy $\nexists a \in [n], b \in \{n+1, n+2, \dots, n+k\}, v_a = v_b$.

V tomto případě existuje cesta ve tvaru

$$(u, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, w, e_{n+1}, v_{n+1}, e_{n+2}, \dots, v_{n+k-1}, e_{n+k-1}, x)$$

Nakonec řešme případ kdy $\exists a \in [n], b \in \{n+1, n+2, \dots, n+k\}, v_a = v_b$.
Nejmenší a pro které $\exists b$ tak, že rovnost $v_a = v_b$ platí označme jako h , korespondující b (existuje pouze jedno) označme jako g . Jako cestu můžeme poté volit jako

$$(u, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{j-1}, e_{j-1}, v_h = v_g, e_{g+1}, v_{g+1}, \dots, v_{n+k-1}, e_{n+k-1}, x)$$

Tímto jsme ukázali, že $\rightsquigarrow$ je ekvivalence. □

3a)

Zadání

Dokažte, že každý graf G s alespoň dvěma vrcholy obsahuje dvojici různých vrcholů se stejným stupněm. Jinými slovy, $\exists u, w \in V(G)$ tak, že $u \neq w$ a $\deg_G(u) = \deg_G(w)$.

Řešení

Ukážeme sporem.

Jako V vezmeme $[n]$.

Předpokládáme, že existuje graf $G = (V, E)$ ve kterém neexistuje dvojice různých vrcholů se stejným stupněm.

Proto tedy můžeme vrcholy označit tak, že $\deg_G(v_0) = 0, \deg_G(v_1) = 1, \dots, \deg_G(v_n) = n$.

Ale toto je spor, protože vrchol v_0 nemá být spojen s žádným dalším vrcholem ale, vrchol v_n má být spojen se všemi vrcholy.

Tím jsme ukázali, že každý graf obsahuje dvojici různých vrcholů se stejným stupněm.

3b)

Zadání

Bud' δ přirozené číslo. Dokažte, že každý nenulový graf, kde každý vrchol má stupeň alespoň δ , obsahuje cestu s δ hranami.

Řešení

Důkaz provedeme sestavením cesty v obecném nenulovém grafu $G = ([n], E)$, kde každý vrchol má stupeň alespoň δ .

Počátek cesty označme jako v_0 . Zvolme jednu hranu z E (je jich alespoň δ) které obsahují v_0 , tu označme jako e_1 . Druhý vrchol, který e_1 obsahuje, označme jako v_1 .

Počet hran z E obsahujících v_1 , které ještě součástí hledané cesty nejsou, je alespoň $\delta - 1$. Jednu z nich zvolme a označme e_2 , vrchol který v hledané cestě ještě není označme v_2 .

Tento krok opakujeme, v k -tém kroku máme cestu $v_0, e_1, v_1, \dots, v_k$.

Počet hran z E , které obsahují v_k a neobsahují žádný z vrcholů $v_j, j \in [k - 1]$ je $\delta - k$.

Jednu z těchto hran zvolíme a označíme e_{k+1} .

Vrchol který v hledané cestě ještě není označme v_{k+1} .

Tento krok můžeme opakovat dokud $k \neq \delta$. Poté není zaručena existence hrany z E , která by spojovala v_δ s vrcholem, který v námi konstruované cestě není.

V grafu tedy existuje cesta $v_0, e_1, v_1, \dots, e_\delta, v_\delta$, která zřejmě obsahuje δ hran.

□

4)

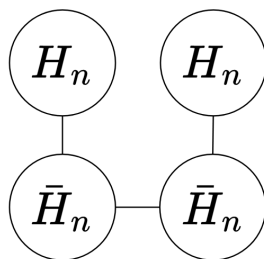
Zadání

Nazvěme graf G *doplňkem sebe sama* platí-li, že G je isomorfní svému doplňku $\bar{G}$. Zkonstruuje nekonečně mnoho navzájem neisomorfních grafů G jež jsou doplňkem sebe sama.

Řešení

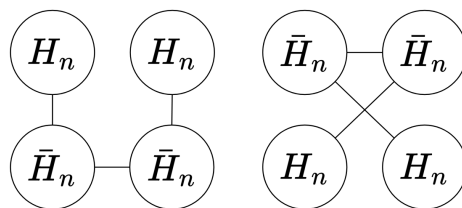
Označme H_n graf s n vrcholy, kde každý vrchol je propojený s každým, tedy $(n - 1)$ -regulární graf. Jeho doplněk označme jako $\bar{H}_n$.

Sestrojme graf jako na obrázku.



Čarou mezi dvěma grafy rozumíme to, že každý vrchol z jednoho grafu je spojený s každým vrcholem v druhém grafu.

Pokud provedeme doplněk tohoto grafu, dostaneme graf jak je vidět na následujícím obrázku. Je zřejmé, že podgraf H_n se stane svým doplňkem a že pokud mezi dvěma podgrafy jsou všechny vrcholy spojeny, tak po provedení doplňku nebudou spojeny žádné.



Levý graf je tedy doplněk pravého, a tyto grafy jsou isomorfní. Graf je tedy námi hledaným doplňkem sebe sama.

Grafy pro různá n jsou mezi sebou zřejmě neisomorfní, protože mají různý počet vrcholů.

Tím jsme zkonstruovali nekonečně mnoho navzájem neisomorfních grafů G jež jsou doplňkem sebe sama.

5)

Zadání

Graf nazvěme *d-regulárním*, jestliže všechny jeho vrcholy mají stupeň přesně d . Určete všechny dvojice čísel n a d , kde $0 \leq d \leq n - 1$, takové, že existuje d -regulární graf s n vrcholy.

Řešení

Předpokládejme graf s n vrcholy, $V = [n]$.

Zavedme následující značení pro $k > 0$

$$E_k = \{\{0, k \bmod n\}, \{1, 1 + k \bmod n\}, \{2, 2 + k \bmod n\}, \dots, \{n - 1, k - 1 \bmod n\}\}$$

Všimněme si, že každé číslo se objeví právě ve dvou neuspořádaných dvojicích.

Pro $k = 0$ definujeme

$$E_0 = \{\}$$

Vidíme, že triviálně platí následující tvrzení $\forall a, b < n/2 \in \mathbb{N}_0, a \neq b \implies E_a \cap E_b = \emptyset$.

Nyní můžeme explicitně konstruovat d -regulární grafy následujícím způsobem.

d -regulární graf označme jako G_d , vezměme $2h = n - 1$ pro n liché, $2h = n - 2$ pro n sudé.

$$\begin{aligned} G_0 &= (\mathbb{V}, E_0) \\ G_2 &= (\mathbb{V}, E_0 \cup E_1) \\ G_4 &= (\mathbb{V}, E_0 \cup E_1 \cup E_2) \\ G_6 &= (\mathbb{V}, E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3) \\ &\dots\dots\dots \\ G_{2h-2} &= (\mathbb{V}, \bigcup_{i=0}^{h-1} E_i) \\ G_{2h} &= (\mathbb{V}, \bigcup_{i=0}^h E_i) \end{aligned}$$

Tímto způsobem jsme zkonstruovali všechny sudé regulární grafy pro libovolný počet vrcholů.

Dále využijme následujícího tvrzení.

Lemma. Pokud pro n vrcholů existuje d -regulární graf, tak pro n vrcholů existuje i $(n - 1 - d)$ -regulární graf.

Důkaz. Důkaz je triviální, stačí si uvědomit že v d -regulárním grafu s n vrcholy, má každý vrchol d hran z $n - 1$ možných.

Jeho doplněk je poté $(n - 1 - d)$ -regulární graf. □

Díky tomuto lematu a předchozí konstrukci dokážeme pro každé sudé n zkonstruovat všechny d -regulární grafy, kde platí $0 \leq d \leq n - 1$.

Nakonec se zabývejme zbývajícím případem, kdy n a d jsou lichá čísla. Vyjděme z principu sudosti a d -regularity hledaného grafu.

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} \deg_G(v) &= 2|E| \\ \sum_{v \in V} d &= 2|E| \\ nd &= 2|E| \end{aligned}$$

Jak vidíme tak pro n a d liché tato rovnost není splněna, protože na levé straně je liché a na pravé straně sudé číslo. A tedy neexistuje d -regulární graf s n vrcholy, pro n a d lichá.

Množina všech uspořádaných dvojic (n, d) tak, že pro ně existuje d -regulární graf s n vrcholy nakonec vypadá následovně.

$$\{(n, d) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq d \leq n - 1 \wedge nd \text{ je sudé číslo}\}$$

2. domácí úlohy

Na tomto úkolu jsem pracoval spolu s Janem Plecháčkem.

1a)

Zadání

Pro každé přirozené $\delta \geq 1$ dokažte, že souvislý graf $G = (V, E)$ s $\delta(G) = \delta$ obsahuje cestu s $\min\{2\delta, |V| - 1\}$ hranami.

Řešení

Zvolme nejdelší cestu v grafu G , tj. posloupnost $v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n$ kde n je délka cesty. Množinu všech vrcholů cesty označme jako P .

Platí následující 2 pozorování:

Lemma. Sousedé vrcholů v_0 a v_n musí být v množině P , tj.

$$N_G(v_0) \subseteq P \wedge N_G(v_n) \subseteq P$$

Důkaz. Pokud by tomu tak nebylo, tak by P nebyla nejdelší cesta v G , stačilo by totiž do cesty přidat bod který je v sousedství jednoho z koncových vrcholů a ještě v cestě není. Což je spor s tím, že P je nejdelší cesta. $\square$

Lemma. Pro žádné $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ neplatí, že $v_i \in N_G(v_n) \wedge v_{i+1} \in N_G(v_0)$ nebo $P = V$.

Důkaz. Sporem, tj $\exists i, v_i \in N_G(v_n) \wedge v_{i+1} \in N_G(v_0)$.

Pokud by tomu tak bylo, šlo by z cesty vytvořit cyklus. Jeho sled by pak byl

$$v_{i+1}, e_{i+2}, v_{i+2}, \dots, v_n, \{v_n, v_i\}, v_i, e_i, v_{i-1}, \dots, e_1, v_0, \{v_0, v_{i+1}\}, v_{i+1}$$

Protože ale víme, že G je souvislý, někde v cestě musí existovat vrchol, který má souseda mimo množinu P (jedinou výjimkou je pokud $P = V$), tento vrchol označme v_k .

Můžeme pak vytvořit cestu, která je delší než P , stačí začít v sousedu v_k a pak projít cyklus.

To je ale spor s tím, že P je nejdelší cesta. $\square$

Nejprve vyřešme případ pro $2\delta < |V|$:

Z předchozích 2 pozorování tedy víme, že posloupnost vrcholů které tvoří cestu musí být alespoň následující.

Cesta začíná ve v_0 poté následuje $\delta - 1$ sousedů v_0 , pak společný soused v_0 a v_n , pak $\delta - 1$ sousedů v_n a konečně v_n .

Tato cesta má celkem $2\delta + 1$ vrcholů, jde tedy o cestu délky 2δ .

Případ $2\delta \geq |V|$ plyne z druhé části druhého tvrzení. v_0 a v_n mají δ sousedů, proto mají alespoň 2 společné vrcholy, z toho neplatí první část druhého tvrzení a proto platí druhá, tedy $P = V$

Máme tedy cestu s $|V|$ vrcholy, ta má délku $|V| - 1$.

Spojením těchto dvou případů dostaneme námi hledané tvrzení. $\square$

1b)

Zadání

Pro každé přirozené $\delta \geq 1$ zkonstruuje nekonečně velkou množinu grafů $\mathcal{G}_\delta$ takovou, že každý $G \in \mathcal{G}_\delta$ je souvislý, má $\delta(G) = \delta$ a zároveň G neobsahuje cestu s $2\delta + 1$ hranami.

Řešení

Zvolme libovolné pevné δ .

Vytvořme následující množinu grafů $\{G_2, G_3, \dots\}$.

G_i vytvořme následovně.

Vezměme i úplných grafů s δ vrcholy, označme H_k , mezi těmito grafy zatím neexistuje cesta.

Do grafu pak přidejme vrchol v_0 , tento vrchol bude propojený s každým jiným vrcholem.

Je zřejmé, že indukované podgrafy G_i které mají vrcholy $V(H_k) + v_0$ jsou úplné grafy s $\delta + 1$ vrcholy, mají tedy stupeň δ .

Z toho plyne, že pro celkový graf platí $\delta(G_i) = \delta$. Tento graf je také zřejmě souvislý. Navíc platí, že každá cesta mezi 2 podgrafy H_k musí procházet přes v_0 .

Z tohoto plyne, že každá cesta navštíví nejvíce 2 podgrafy H_k a z toho dostáváme, že nejdelší možná cesta má délku 2δ .

V podgrafu H_k totiž nalezneme cestu délky $\delta - 1$, pak se cestou přes 2 hrany dostaneme do jiného podgrafu H_j , kde nalezneme cestu o nejvíce $\delta - 1$ vrcholech.

Celkem tedy jako délku nejdelší cesty máme $2(\delta - 1) + 2 = 2\delta$.

2a)

Zadání

Pro každé n a $k \leq n$ určete (a následně dokažte!) minimální počet hran grafu s n vrcholy a k komponentami souvislosti.

Řešení

Zvolme libovolné pevné n .

Nejprve řešme případ s jednou komponentou souvislosti, tedy $k = 1$:

Hledáme tedy souvislý graf s minimálním počtem vrcholů, to je ale z definice strom. Pro něj platí $|E| = n - 1$

Případ $k > 1$:

Vezměme $G = (V, E) = (\bigcup_{i=1}^k V_i, \bigcup_{i=1}^k E_i)$, kde $G_i = (V_i, E_i)$ jsou různé komponenty souvislosti G . Navíc $n = |V|$

Platí, že $|E| = \sum_{i=1}^k |E_i|$. Protože $|E_i| > 0$ stačí minimalizovat jednotlivé E_i .

Protože ale platí, že jednotlivé komponenty souvislosti jsou souvislé podgrafy, tak z případu pro $k = 1$ víme, že to nastává pro $|E_i| = |V_i| - 1$.

Celkem tedy dostáváme

$$|E| = \sum_{i=1}^k |E_i| = \sum_{i=1}^k (|V_i| - 1) = |V| - k = n - k$$

□

2b)

Zadání

Pro každé n a $k \leq n$ určete (a následně dokažte!) maximální počet hran grafu s n vrcholy a k komponentami souvislosti.

Řešení

Zvolme libovolné pevné n .

Definujme graf $G = (V, E) = (\bigcup_{i=1}^k V_i, \bigcup_{i=1}^k E_i)$, kde $G_i = (V_i, E_i)$ jsou různé komponenty souvislosti G . Navíc $n = |V|$

Nejprve řešme případ s jednou komponentou souvislosti, tedy $k = 1$:

Nejvíce hran má úplný graf K_n , pro který platí $E(K_n) = \binom{|V|}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$.

Případ $k = 2$:

Hledáme maximum $|E| = |E_1| + |E_2|$, navíc platí, že každá komponenta musí být úplný graf (jinak bychom do ní mohli přidat hranu).

Platí, že $|V_1| = n - |V_2|$

Platí tedy

$$|E| = |E_1| + |E_2| = \binom{|V_1|}{2} + \binom{|V_2|}{2} = \binom{n - |V_2|}{2} + \binom{|V_2|}{2} = (|V_2| - \frac{1}{2}n)^2 + \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}$$

Výraz maximalizujeme pro $|V_2|$, n je pevné, navíc platí $0 < |V_2| < n$.

Jediné podezřelé body jsou pro $|V_2| = 1, n - 1, \lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, jednoduchým dosazením zjišťujeme, že maxima dosahujeme pro $|V_2| = 1$ a $|V_2| = n - 1$

G tedy má maximum hran, pokud je jeden vrchol osamocený, a druhá komponenta souvislosti je úplný graf. Máme tedy

$$|E| = \binom{n-1}{2}$$

Případ $k > 2$:

Hledáme maximum $|E| = \sum_{i=1}^k |E_i|$.

Musí platit, že každé 2 různé komponenty souvislosti G_j, G_k maximalizují $|E_j| + |E_k|$. Pokud by tomu tak nebylo, mohli bychom vzít vrcholy V_j a V_k a vytvořit z nich 2 nové komponenty, které by měly více hran.

Z toho plyne, že mezi každou dvojicí různých komponentů souvislosti, je jeden z nich osamocený vrchol a jeden z nich úplný graf (osamocený vrchol je také úplný graf).

Z této podmínky plyne, že máme $k - 1$ osamocených vrcholů, a jeden úplný graf s $n - k + 1$ vrcholy.

Celkově tedy dostáváme

$$|E| = \binom{n - k + 1}{2}$$

3a)

Zadání

Nechť $T = (V, E)$ je strom obsahující vrchol stupně $k \geq 3$. Dokažte, že T má alespoň k listů.

Řešení

Označme vrchol stupně k jako v_0 . Vytvořme zakořeněný strom (tj. orientovaný graf) tak, že vrchol v_0 bude kořenem. Orientace stran je určena tak, aby hrany vedly směrem od kořene.

Definujme potomka vrcholu a jako vrchol do kterého vede hrana z vrcholu a .

Dokažme pomocné tvrzení

Lemma. Z každého vrcholu v orientovaném stromu existuje cesta která je zakončená listem.

Důkaz. Existují 2 možnosti. Buď je vrchol listem (v tom případě je cesta triviální), nebo zvolíme libovolný z jeho potomků a strom postupně procházíme. Protože má strom konečný počet vrcholů a neobsahuje cyklus, vždy dorazíme do vrcholu kterýž potomek nemá, tedy listu. $\square$

Vrchol v_0 je stupně k , má tedy k potomků. Na každý z těchto vrcholů aplikujeme pomocné tvrzení. Je tedy zřejmé, že strom má alespoň k listů. $\square$

3b)

Zadání

Buď $G = (V, E)$ graf. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní.

- (a) G je strom
- (b) G neobsahuje kružnici a $|V| = |E| + 1$

Řešení

Z (a) dokažme (b):

Kružnici neobsahuje z definice.

Vezměme libovolný list stromu a odeberme ho (i s hranou která do něj vede). Ze stromu jsme tedy odebrali jednu hranu a jeden vrchol. Graf který vznikl, je stále stromem, protože odebráním listu graf nepřestal být souvislý a odebráním

hrany jsme nemohli vytvořit cyklus.

Toto můžeme tedy opakovat. Nakonec se dostaneme do situace kdy nám v grafu zůstane pouze jeden vrchol.

Jak jsme zmínili i toto je strom, a pro něj platí rovnice $|V| = |E| + 1$ triviálně. Protože jsme se do tohoto stavu dostali postupným odečítáním 1 z obou stran rovnice, tak vztah musí platit i pro původní strom.

Z (b) dokažme (a):

Chceme ukázat že $\forall x, y \in V, \exists_1$ cesta v G z x do y .

Potřebujeme tedy ukázat, že mezi všemi vrcholy existuje nějaká cesta (tj. graf je souvislý) a poté, že existuje pouze jedna.

Lemma. Pokud G neobsahuje kružnici a $|V| = |E| + 1$, tak potom je G souvislý.

Důkaz. Pro spor předpokládáme, že není souvislý.

Existují tedy alespoň 2 komponenty souvislosti.

Graf označme jako $G = (G_V, G_E) = \bigcup_{i=1}^k K_i, K_i = (V_i, E_i)$, kde K_i jsou jednotlivé komponenty souvislosti.

Navíc platí, že souvislý graf o n vrcholech, má nejméně $n - 1$ hran, jak bylo ukázáno v úkolu 2a)

Z předpokladu platí

$$\begin{aligned} |G_V| &= |G_E| + 1 \\ \sum_i |V_i| &= \sum_i (|E_i|) + 1 > \sum_i (|V_i| - 1) + 1 \end{aligned}$$

Kde nerovnost platí pro $i > 1$, tj. pro každý nesouvislý graf.

Z toho plyne, že alespoň jedna komponenta souvislosti má více než $n - 1$ hran, označme ji jako H . Navíc z definice platí, že komponenta souvislosti je souvislá.

Z toho, ale plyne, že H není strom, protože H není do inkluze vůči hranám minimální souvislý graf.

Nakonec využijme definice stromu, která říká, že strom je souvislý graf bez cyklů. Protože H není strom, ale je souvislý, tak musí obsahovat cyklus, což je spor. $\square$

Z pomocného tvrzení tedy plyne, že mezi každými 2 vrcholy tedy existuje nějaká cesta. To, že existuje právě jedna plyne z předpokladu o neexistenci kružnici v grafu. Pokud by totiž v grafu existovali 2 různé cesty z vrcholu a do b , šlo by z nich triviálně vytvořit cyklus.

Dokážeme sporem.

Stačilo by vzít 2 vrcholy s nejmenší vzdáleností pro které existují alespoň 2 různé cesty, cyklus by šel pak vytvořit tím, že nejprve z bodu a půjdeme do bodu b jednou cestou a pak z bodu b do bodu a . Tyto 2 cesty by měli společné pouze vrcholy a a b (jinak by existovaly 2 vrcholy s kratší vzdáleností) a tvořili by cyklus, což je spor s předpokladem.

Tímto jsme dokázali ekvivalenci tvrzení. $\square$

4)

Zadání

Dokažte, že pro posloupnost $n \geq 2$ celých čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:

- (a) Existuje strom, který má skóre $(d_1, d_2, \dots, d_n)$
- (b) $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$

Řešení

Z (a) dokažme (b):

Nechť existuje strom $T = (V, E)$, který má skóre $(d_1, d_2, \dots, d_n)$. T je tedy souvislý a $|E| = |V| - 1$.

Potom platí (z handshaking lemmatu)

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| = 2(|V| - 1) = 2(n - 1)$$

Z (b) dokažme (a):

Dokážeme indukcí.

Pro $n = 2$: $1 \leq d_1 \leq d_2$, $d_1 + d_2 = 2$. Z toho máme $d_1 = d_2 = 1$.

Jako strom zvolme $T = ([2], \{1, 2\})$. Tento strom má zřejmě skóre $(1, 1)$.

Indukční krok:

Indukční předpoklad tedy je, že tvrzení platí pro n , tj. pokud $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ tak existuje strom který má skóre $(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

Tvrzení dokažme pro $n + 1$.

Víme, že

$$\sum_{i=1}^{n+1} d_i = 2(n + 1) - 2$$

kde $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{n+1}$.

Z tohoto plyne, že $d_1 = 1$ (jinak by suma byla větší než pravá strana) a $d_{n+1} \geq 2$ (jinak by suma byla menší než pravá strana).

Z posloupnosti $(d_1, d_2, \dots, d_{n+1})$ odeberme d_1 a d_{n+1} zaměňme za $d_{n+1} - 1$.

Z této posloupnosti, vytvoříme neklesající posloupnost čísel $g_1, \dots, g_n$, (g_n nemusí nutně být d_{n+1}) pro kterou platí

$$\sum_{i=1}^{g+1} d_i = 2(n + 1) - 2$$

Podle indukčního předpokladu pro tuto posloupnost existuje strom T_n s jejím skóre.

Tento strom obsahuje $v \in V$, $\deg(v) = d_{n+1} - 1$, k tomuto vrcholu připojíme list, a tím se změní stupeň v na, $\deg(v) = d_{n+1}$, zároveň má list stupeň 1, dáme ho na začátek posloupnosti. Tím dostáváme strom se skóre $(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

Nakonec doplníme, že tento nový graf je stále stromem, neboť přidáním listu nemůže vzniknout cyklus nebo vzniknout nová komponenta souvislosti.

5)

Zadání

Nechť K_n^- je (až na izomorfismus jednoznačně určený) graf s n vrcholy a $\binom{n}{2} - 1$ hranami. Určete počet koster K_n^- pro každé $n \geq 3$.

Řešení

Nejprve najdeme počet koster, které obsahují jednu konkrétní hranu. Provedeme to tak, že spočteme celkový počet hran všech koster úplného grafu s n vrcholy dvěma různými způsoby.

Z Caleyho formule víme, že na úplném grafu existuje n^{n-2} koster. Dále víme, že každá kostra úplného grafu má $n - 1$ hran, (plyne z definice stromu jako do inkluze vůči hranám minimálního a souvislého grafu a z cvičení 2)), proto celkem dostáváme $n^{n-2}(n - 1)$ hran.

Dále víme, že na úplném grafu patří každá hrana do stejného počtu koster (plyne ze symetrie úlohy, není možné aby se jedna hrana lišila), toto číslo označme jako k . Dále víme, že v úplném grafu máme $\binom{n}{2}$ hran. Tedy každá hrana patří do k stromů a celkem tedy máme $\binom{n}{2}k$ hran.

Tyto dva vztahy se ale zřejmě musí rovnat. Dostáváme tedy

$$n^{n-2}(n - 1) = \binom{n}{2}k$$

Upravme a dostaneme

$$k = n^{n-2} \frac{(n - 1)}{\binom{n}{2}} = n^{n-2} \frac{2}{n} = 2n^{n-3}$$

Toto je tedy počet koster úplného grafu, které obsahují jednu konkrétní hranu.

Abychom dostali počet koster K_n^- stačí tedy toto číslo odečíst od celkového počtu koster.

$$n^{n-2} - 2n^{n-3} = (n - 2)n^{n-2}$$

Celkově tedy počet koster pro K_n^- je $(n - 2)n^{n-2}$.

3. domácí úlohy

1a)

Zadání

Buď $G = (V, E)$ k -regulární bipartitní graf s částmi L a R . Dokažte, že $|L| = |R|$.

Řešení

Počet hran vycházejících z L je zřejmě $k|L|$, počet hran vycházejících z R , je zřejmě $k|R|$.

Je zřejmé, že se oba tyto výrazy musí rovnat (jedná se o 2 různé způsoby jak spočítat všechny hrany v grafu), proto tedy $|L| = |R|$ $\square$

1b)

Zadání

Nalezněte, až na isomorfismus, všechny bipartitní grafy G , jejichž doplněk $\bar{G}$ je též bipartitní.

Řešení

Po provedení doplňku se z L a R stanou úplné podgrafy. Vezměme tedy třeba úplný podgraf $\bar{L}$, pokud je $|L| > 2$ určitě by v něm existoval lichý cyklus. Protože podgraf bipartitního grafu musí být také bipartitní dostáváme, že $|L|, |R| \leq 2$.

Z tohoto plyne, že aby pro graf $G = (V, E)$ platilo, že jeho doplněk je bipartitní tak pak $|V| \leq 4$.

Navíc také platí, že mezi každou trojicí vrcholů musí být buď 1 nebo 2 hrany. V opačném případě existuje v grafu nebo jeho doplňku lichý cyklus.

Z toho plyne že G nemůže být prázdný/úplný pro $|V| \geq 3$.

Pro případ $|V| = 4$ tedy dostáváme následující grafy:

Jako množinu vrcholů vezměme $[4]$.

BÚNO (jinak by šlo pouze o izomorfismus) má graf hranu $\{1, 2\}$. Mezi vrcholy 2, 3, 4 ale není žádná hrana, kvůli předchozímu tvrzení musíme mezi nimi jednu hranu přidat. Máme 2 možnosti (kvůli izomorfismu) buď přidáme hranu $\{2, 3\}$ nebo $\{3, 4\}$ (*).

Pro případ $\{2, 3\}$, ale opět chybí hrana mezi 1, 3, 4, hranu $\{1, 3\}$ přidat nemůžeme, vznikl by cyklus o délce 3. Proto přidáme hranu například $\{3, 4\}$ (druhá možnost je opět izomorfní s touto). Doplněk tohoto grafu je pak izomorfní se sebou samým. Rozdělení které existuje je $L = \{1, 3\}$, $R = \{2, 4\}$.

Nakonec bychom k tomuto grafu ještě mohli přidat hranu $\{4, 1\}$, vznikl by cyklus, doplněk tohoto grafu by byl izomorfní s grafem s hranami $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$ (tímto jsme se dostali k (*), navíc z grafu s hranami $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$ dostaneme přidáním libovolné hrany graf izomorfní s předchozím případem). Tento graf je i se svým doplňkem opět bipartitní, volme například $L = \{1, 3\}$, $R = \{2, 4\}$.

Případ $|V| = 3$:

Jako množinu vrcholů vezměme $[3]$.

BÚNO má graf hranu $\{1, 2\}$. Přidáním další hrany dostaneme jeho doplněk a oba tyto grafy jsou bipartitní.

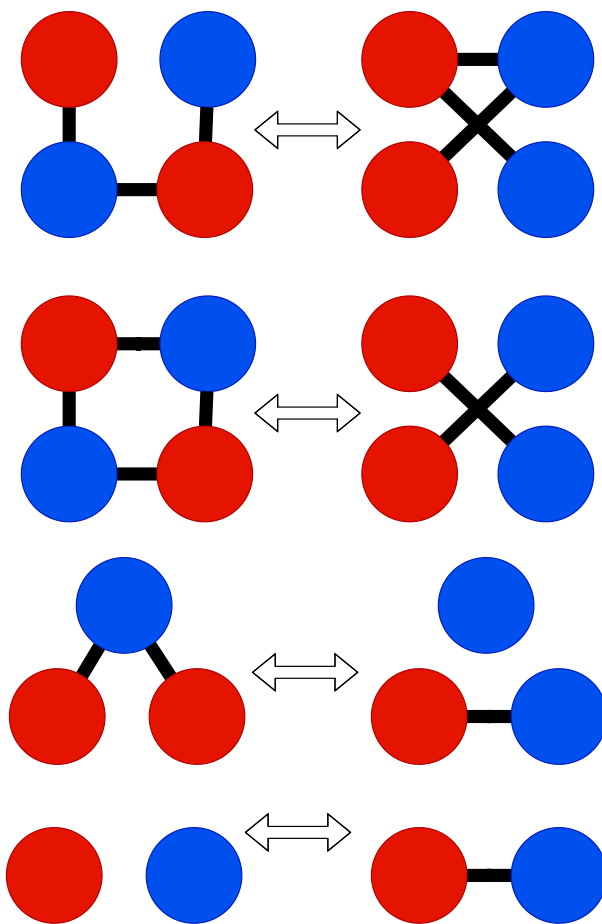
Případ $|V| = 2$:

Prázdný graf je zřejmě bipartitní, jeho doplněk je $G = ([2], 1, 2)$ je také.

Případ $|V| = 1, 0$:

Oba dva tyto degenerované případy jsou bipartitní a jsou doplňkem sebe sama.

Na obrázku můžeme vidět všechny grafy s jejich doplňky (bez degenerovaných případů). Obarvení určuje rozdělení do L a R



Všechny bipartitní grafy jejichž doplněk je také bipartitní

2)

Zadání

Pro graf $G = (V, E)$ označme průměrem G maximální délku nejkratší cesty mezi nějakými dvěma vrcholy, tzn. $\max_{u,v \in V} \text{dist}_G(u, v)$. Dokažte, že má-li graf průměr alespoň 4, tak jeho doplněk má průměr nejvýše 2.

Řešení

Pokud by graf měl více než jednu komponentu souvislosti tvrzení by pak bylo triviální, každý vrchol má totiž pak v sousedství všechny vrcholy z ostatních komponent, tj. nejkratší cesta mezi každými dvěma body je nejvýše 2.

Řešme tedy případ s jednou komponentou souvislosti.

Protože graf má průměr ≥ 4 určitě obsahuje cestu nejkratší délky přesně 4, stačí z nejdelší nejkratší cesty vzít libovolné 4 po sobě jdoucí vrcholy.

Označme vrcholy cesty jako $v_1, \dots, v_5$, pak musí platit, že v grafu neexistují následující hrany

$$\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_5\}$$

Navíc neexistují vrcholy $w, u \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, pro který by existovala nějaká dvojice následujících hran (platí i pro u).

$$\{\{v_1, w\}, \{w, v_4\}\}, \{\{v_1, w\}, \{w, v_5\}\}, \{\{v_2, w\}, \{w, v_5\}\},$$

Navíc nemohou existovat následující 2 trojice $\{\{v_1, w\}, \{w, u\}, \{u, v_5\}\}$ nebo $\{\{v_1, w\}, \{w, u\}, \{u, v_5\}\}$.

Všechny tři tyto omezení plynou z toho, že $v_1, \dots, v_5$ tvoří nejkratší cestu mezi v_1 a v_5 .

Provedeme doplněk:

Z druhého omezení plyne, že pro $\forall w, u \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, máme vždy alespoň jednu z každé dvojice hran, navíc existuje jedna z hran z každé trojice z třetího omezení.

Například tedy existuje jedna z hran $\{\{v_1, w\}, \{w, v_5\}\}$ a jedna z hran $\{\{v_1, u\}, \{u, v_5\}\}$.

Ukažme sporem, že toto implikuje, že mezi uzly u, w existuje nejkratší cesta délky nejvíce 2.

Důkaz. Předpokládejme, že taková cesta neexistuje.

Zřejmě tedy musí platit, že pro libovolné $v \in \{v_1, \dots, v_5\}$ nemůže existovat dvojice hran $\{\{w, v\}, \{v, u\}\}$, poté by totiž cesta určitě existovala.

Díky této podmínce dostaneme BÚNO (stačilo by přeznačit u, w) z první dvojice následující hrany $\{v_1, w\}, \{u, v_4\}$.

Z druhé dvojice máme jedinou možnost jak hrany zvolit a to $\{v_1, w\}, \{u, v_5\}$.

Z třetí dvojice máme opět jedinou možnost, a to jsou hrany $\{v_2, w\}, \{u, v_5\}$.

Máme tedy hrany $\{v_1, w\}, \{v_2, w\}, \{u, v_4\}, \{u, v_5\}$.

Nakonec z třetího omezení máme $\{\{v_1, u\}, \{w, u\}, \{w, v_5\}\}$ existence libovolné hrany z této trojice je ale spor.

□

V doplňku tedy existuje cesta délky 2 mezi každými vrcholy, které nejsou součástí cesty.

Zabývejme se nyní vrcholy na cestě.

Z prvního omezení triviálně plyne, že vrcholy v_1, v_3, v_5 a v_2, v_4 , tvoří úplné grafy, jsou od sebe tedy vzdálenosti 1.

Navíc díky první a druhé podmínce platí, že tyto vrcholy jsou ve vzdálenosti 2 od libovolného vrcholu mimo cestu.

Například pro vrchol v_1 máme z druhé podmínky existenci jedné z hran $\{\{v_1, w\}, \{w, v_4\}\}$ a z první podmínky máme v doplňku hranu $\{v_1, v_4\}$, z toho plyne zřejmě plyne, že buď existuje cesta v_1, w nebo cesta v_1, v_4, w .

Stejně můžeme postupovat i pro vrcholy $v_2, \dots, v_5$

Chybí nám ukázat vzdálenosti mezi v_1, v_2 , mezi v_4, v_5 , mezi v_1, v_4 , mezi v_5, v_2 , mezi v_2, v_3 a mezi v_3, v_4 .

To opět plyne z prvního omezení.

Triviálně pro v_1, v_4 a v_5, v_2 .

Pro v_2, v_3 volíme cestu procházející přes v_5 , pro v_3, v_4 procházející přes v_1 .

Tím jsme ukázali, že pokud má graf průměr alespoň 4, tak jeho doplněk má průměr nejvýše 2. $\square$

3)

Zadání

Pro graf $G = (V, E)$ označme $g(G)$ délku nejkratšího cyklu, který G obsahuje; pokud je G acyklický, definujeme $g(G) := \infty$. Poznamenejme, že parametru $g(G)$ se také říká obvod grafu.

Buď $d \geq 3$ a $r \geq 2$ pevné a $G = (V, E)$ libovolný d -regulární graf. Dokažte

1. Je-li $g(G) = 2r$, tak potom $|V| \geq \frac{2(d-1)^r - 2}{d-2}$
2. Je-li $g(G) = 2r + 1$ tak potom $|V| \geq \frac{d(d-1)^r - 2}{d-2}$

Řešení

Pro jednoduchost definujme k -té patro jako množinu $L(k) = \{v \in V \mid \text{dist}(v_0, v) = k\}$.

Řešme první případ.

Vezměme vrchol v_0 , z d -regularity platí, že vrchol musí mít alespoň d potomků. Navíc platí, že tyto potomci nemohou být spojeni, jinak vznikne cyklus délky 3 (méně než $2r$, $r \geq 2$).

Každý z těchto potomků, ale musí mít $d - 1$ vlastních potomků. Pro tyto potomky v 2. patře platí, že pokud je $r \geq 3$ tak nemohou být propojené mezi sebou, nebo s libovolným předchozím patrem, jinak vznikne cyklus.

Takto postupujeme dokud nedostaneme $r - 1$ pater.

Ten obsahuje $d(d-1)^{r-1}$ vrcholů a musí být tedy spojený s alespoň $(d-1)^{r-1}$ vrcholy.

Počet vrcholů je pak $\sum_{i=0}^r -1|L(i)| + (d-1)^{r-1}$.

Ta se rovná

$$1 + d + d(d-1) + d(d-1)^2 + \dots + d(d-1)^{r-1} + (d-1)^{r-1}$$

Po upravách dostaneme tvar

$$|V| \geq \frac{2(d-1)^r - 2}{d-2}$$

Druhý případ řešíme úplně stejně, jenom dojdeme do případu kdy máme

$$1 + d + d(d-1) + d(d-1)^2 + \dots + d(d-1)^{r-1}$$

vrcholů což upravíme na $|V| \geq \frac{d(d-1)^r - 2}{d-2}$

4)

Připomeňme, že pro graf $G = (V, E)$ nazveme hranu $e \in E$ mostem, jestliže podgraf $(V, E \setminus \{e\})$ má více komponent souvislosti než G .

Analogicky nazveme vrchol $v \in V$ artikulací, jestliže indukovaný podgraf množinou $V \setminus v$ má více komponent souvislosti než G .

4a)

Zadání

Dokažte, že každý $2k$ - regulární graf neobsahuje most.

Řešení

BÚNO mějme souvislý graf. (Pokud není můžeme se koukat pouze na jednu komponentu souvislosti)

Ukážeme sporem.

Předpokládejme tedy $2k$ -regulární graf G , který obsahuje most e .

Pokud bychom most odstranili dostaneme 2 komponenty souvislosti. Podívejme se na libovolnou z nich jako na indukovaný podgraf G , označme $H = (V, E)$.

Pak z handshaking lemma máme a z toho, že jednomu z vrcholů chybí jedna hrana plyne

$$2|E| = \sum_{v \in V} = 2k|V| - 1$$

Z toho ale máme, že $|E| = k|V| - \frac{1}{2}$. Počet hran ale nemůže být necelé číslo proto jsme našli spor.

□

4b)

Zadání

Dokažte, že každý k -regulární bipartitní graf neobsahuje artikulaci.

Řešení

BÚNO mějme souvislý k -regulární bipartitní graf G . (Pokud není můžeme se koukat pouze na jednu komponentu souvislosti)

Z 1a) víme, že $|L| = |R|$.

Ukážeme sporem.

Předpokládejme, že G má artikulaci v . Jejím odstraněním dostáváme několik komponentů souvislosti. Podívejme se na libovolnou z nich jako na indukovaný podgraf G , označme $H = (V, E)$.

H je bipartitní (protože se jedná o podgraf bipartitního grafu). Označme L a R jednotlivé části rozkladu.

BÚNO předpokládejme, že v byla spojena s L za pomoci i hran. Z bipartitnosti víme, že byla spojena jen s jednou částí, navíc víme, že $i < k$.

Podívejme se kolik hran vede z R . Z regularity máme $k|R|$ hran.

Pro L dostáváme $k|L| - i$ hran.

Dostáváme tedy $k|R| = k|L| - i$. To upravme jako

$$\frac{i}{k} = |L| - |R|$$

Pravá strana je zřejmě celé číslo. Ale protože $i < k$ tak levá strana celé číslo není, což je spor. $\square$

5a)

Zadání

Buď $G = (V, E)$ neprázdný graf a buď $d := \frac{|E|}{|V|}$. Dokažte, že G obsahuje indukovaný podgraf H splňující $\delta(H) > d$.

(Nápověda: zkuste z G postupně odebírat vrcholy stupně nejvýše d .)

Řešení

Postupujme podle nápovědy. Vezměme graf $G_i = (V_i, E_i)$ a odeberme z něj vrchol stupně nejvýše $d_i := \frac{|E_i|}{|V_i|}$, tím vytvoříme graf G_{i+1}

Platí, že $d_i \leq d_{i+1}$. Toto plyne z

$$\frac{|E_i|}{|V_i|} \leq \frac{|E_{i+1}|}{|V_{i+1}|} = \frac{E_i - \frac{|E_i|}{|V_i|}}{|V_i| - 1}$$

Toto opakujeme, dokud se nedostaneme do situace, kdy v grafu není vrchol, který by měl stupeň menší než d_i .

Tím dostáváme graf, kde máme alespoň n vrcholů nejméně stupně d_i , což jsme chtěli ukázat.

5b)

Zadání

Pro každé přirozené $d \geq 1$ a každé $\varepsilon \in (0, 1)$ zkonstruuje graf $G_{d,\varepsilon} = (V, E)$ takový, že splňuje $\frac{|E|}{|V|} > d - \varepsilon$ a zároveň $\delta(H) \leq d$ pro každý podgraf $H \subseteq G_{d,\varepsilon}$.

Řešení

4. domácí úlohy

Na tomto úkolu jsem pracoval spolu s Janem Plecháčkem.

1a)

Zadání

Buď $G = (V, E)$ graf s n vrcholy a spektrem $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Dokažte, že

$$\sum_{i \in [n]} \lambda_i^2 = 2|E|$$

Řešení

Využijeme dvě věty z lineární algebry.

Lemma. Nechť má matice $\mathbb{A}$ vlastní číslo λ , poté má matice $\mathbb{A}^2$ vlastní číslo λ^2

Důkaz. Víme, že platí $\mathbb{A}x = \lambda x$. Pak jednoduše máme

$$\mathbb{A}^2 x = \mathbb{A}(\mathbb{A}x) = \mathbb{A}(\lambda x) = \lambda \mathbb{A}x = \lambda^2 x$$

□

Lemma. Stopa matice $\mathbb{A}$ je rovna součtu vlastních čísel matice (včetně násobnosti).

Bez důkazu.

Graf má matici sousednosti A_G , její prvky značme a_{ii} . Pak za pomoci předchozích dvou vět platí

$$\sum_{i \in [n]} \lambda_i^2 = \text{tr}(A_G^2)$$

Označme prvky matice A_G^2 jako b_{ii} . Nyní stačí explicitně spočítat stopu. Máme

$$\sum_{i \in [n]} \lambda_i^2 = \text{tr}(A_G^2) = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}$$

V posledním kroku jsme využili vlastnosti, že matice A_G je symetrická a navíc toho, že její hodnoty jsou buď 1 nebo 0. Poslední člen je navíc zřejmě roven $2|E|$, protože počítáme počet jedniček v matici sousednosti, a každá hrana spojuje právě dva vrcholy.

Celkem tedy dostáváme hledané

$$\sum_{i \in [n]} \lambda_i^2 = 2|E|$$

□

1b)

Zadání

Buď G souvislý graf s maximálním stupněm D , a necht spektrum G má největší vlastní číslo λ_1 . Dokažte, že $D = \lambda_1$ právě když G je D -regulární.

Řešení

Dokažme $\Leftarrow$:

Plyne z tvrzení z přednášky $D = \delta \leq \lambda_1 \leq \Delta = D$. Z toho zřejmě $D = \lambda_1$.

Dokažme $\Rightarrow$:

Platí $D = \lambda_1$, vezměme libovolný vlastní vektor (označme x) tohoto vlastního čísla. Označme x_k v absolutní hodnotě jeho největší prvek. Vezměme vektor $y = \frac{1}{x_k} x$ (vlastní vektor D) a jeho největší hodnota je 1.

Vezměme k -tý řádek matice A_G a označme ho jako a_k

Platí, že $A_G y = Dy$ a také platí $a_k^T y = Dy$. Z tohoto dostáváme následující sadu nerovností.

$$D = D \cdot y_k = a_k^T y = \sum_{i=1}^n a_{k,i} y_i \leq \sum_{i=1}^n a_{k,i} y_k = \sum_{i=1}^n a_{k,i} = \deg(k) \leq D$$

Proto u nerovnosti $\sum_{i=1}^n a_{k,i} y_i \leq \sum_{i=1}^n a_{k,i} y_k$ vždy nastává rovnost. Protože $y_j \leq 1, \forall j \in [n]$ dostáváme $y_k = y_j = 1$.

Pokud v nerovnosti použijeme místo k řádek j (kde j je soused k v grafu) dostaneme $\deg(j) = D$. Opakováním procesu dospějeme k tomu, že $y_j = 1$ a $\deg(j) = D$ protože graf je souvislý.

2)

Zadání

Buď $G = (V, E)$ graf s n vrcholy a spektrem $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Dokažte, že graf je bipartitní právě tehdy když $\lambda_i = -\lambda_{n-i+1}$ pro každé $i \in [n]$

Řešení

Dokažme $\Leftarrow$:

Necht $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ a platí $\lambda_i = -\lambda_{n-i+1}$. Ze symetrie A_G víme, že je diagonalizovatelná, a pro k -tou mocninu pak platí, $A_G^k = X D^k X^{-1}$. Vlastní čísla matice A_G^k jsou tedy λ_i^k .

Z přednášky víme, že $(A_G^k)_{ij}$ je počet sledů délky k z vrcholu i do j . Chci ukázat, že graf nemá cyklus liché délky, tedy chci ukázat, že $(A_G^k)_{ii} = 0$ pro každé liché k .

Protože máme $\lambda_i = -\lambda_{n-i+1}$, tak také platí $\lambda_i^k = (-\lambda_{n-i+1})^k$ a proto tedy $\text{Tr}(A_G^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = 0$ pro každé liché k .

Protože, ale jsou všechny prvky matice nezáporné, tak platí, že $(A_G^k)_{ii} \geq 0$, protože je ale stopa matice rovna nule, tak musí platit $(A_G^k)_{ii} = 0$.

Graf tedy neobsahuje cyklus liché délky a proto je bipartitní.
Dokažme $\implies$:

Nechť $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ a G bipartitní. Označme vrcholy v množině L čísla od 1 do i , v R od $i+1$ do n . Matice sousednosti pak vypadá následovně.

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$$

To plyne z toho, že vrcholy z L a R nejsou spojeny.

Nechť $\vec{x}$ je libovolný vlastní vektor A_G k nějakému vlastnímu číslu λ , označme prvních i prvků jako $\vec{y}$ a zbylé prvky jako $\vec{z}$. Pak máme

$$A_G \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \lambda \vec{x}$$

Z prostřední rovnosti víme, že $B^T \vec{y} = \lambda \vec{z}$ a $B \vec{z} = \lambda \vec{y}$. Pak je ale i vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} \vec{y} \\ -\vec{z} \end{pmatrix}$ vlastním vektorem, protože

$$A_G \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{y} \\ -\vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B \vec{z} \\ B^T \vec{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \vec{y} \\ \lambda \vec{z} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} \vec{y} \\ -\vec{z} \end{pmatrix} = -\lambda \vec{w}$$

Z toho dostáváme, že pokud je λ vlastní číslo, tak pak je i $-\lambda$ vlastní číslo.

Protože A_G je symetrická tak víme, že je diagonalizovatelná. To znamená, že pro všechny vlastní čísla se rovná geometrická a algebraická násobnost. Z tohoto a předchozího pozorování pak plyne, že má-li vlastní číslo λ_k algebraickou násobnost i , tak i vlastní číslo $-\lambda_k$ bude mít násobnost i . To plyne z toho, že λ_k má i nezávislých vlastních vektorů, a ty můžeme podle předchozího upravit na i vlastních vektorů $-\lambda_k$.

Když seřadíme vlastní velikosti, tak již dostaneme námi hledané tvrzení, tj. $\lambda_i = -\lambda_{n-i+1}$ pro každé $i \in [n]$

Těžká úloha 3

Zadání a)

Dokažte, že počet neisomorfních stromů s n vrcholy je nejvýše 4^n .

Řešení a)

Zabývejme se počtem neisomorfních uspořádaných orientovaných stromů na n vrcholech. Jejich počet je větší než počet neisomorfních neuspořádaných orientovaných stromů, a ten je větší než počet neisomorfních neorientovaných stromů. Toto plyne z pozorování, že každý isomorfismus na orientovaném grafu funguje také pro neorientovaný graf, navíc změněním dvou navzájem neisomorfních orientovaných stromů na neorientované, mohou vzniknout neorientované stromy isomorfní.

Mějme tedy libovolný uspořádaný orientovaný strom $T = (V, E)$. Označme jeho kořen jako v_0 .

Pro jednoduchost definujme množinu $L(k) = \{v \in V \mid \text{dist}(v_0, v) = k\}$.

Dále definujme k -té patro jako uspořádanou $|L(k)|$ -tici vrcholů, která obsahuje všechny vrcholy z $L(k)$.

Navíc definujme pozici vrcholu v k -tém patře následovně, řekněme, že vrchol v je nalevo od vrcholu w , pokud se v v uspořádané $|L(k)|$ -tici vyskytuje před w . Řekněme, že v je napravo od w , právě pokud w je nalevo od v .

V této úloze pro uspořádání stromu požadujeme následující. Pokud pro předka v platí, že je nalevo od předka w , tak musí platit že v je nalevo od w .

V této úloze navíc zavedme následující značení pro binární posloupnosti. Místo psaní například $(1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$ píšme 1010110.

Definujme následující prosté zobrazení f_n mezi orientovaným stromem s n vrcholy T_n a binární posloupností b složenou z číslic 1 a 0.

$f_n : T_n \mapsto (b)_{i=1}^{2n}$ funguje následujícím způsobem. Stromem T postupně projdeme všechny vrcholy po patrech zleva doprava a u každého vrcholu do výsledné posloupnosti zapisujeme tolik jedniček, jaký je počet jeho potomků. Po zapsání počtu potomků zapišme do posloupnosti 0 (i v případě, že vrchol potomka nemá). Výsledná posloupnost má délku $2n - 1$ (ukážeme později), přidáme tedy jednu 0 aby měla délku $2n$.

Výsledkem je tedy posloupnost o délce $2n$.

Příklad. Předpokládejme strom $R = ([5], \{(1, 2), (2, 3), (1, 4), (4, 5)\})$.

Začneme tedy ve vrcholu 1, ten obsahuje dva potomky, proto do výsledné posloupnosti zapisujeme 110.

Zvolme jeden z potomků v prvním patře stromu, například 2, ten obsahuje jednoho potomka, do posloupnosti tedy přidáme 10.

Následně zvolme druhého potomka v prvním patře, tedy 4, tento vrchol obsahuje jednoho potomka, do posloupnosti přidáme 10.

Protože jsme prošli všechny vrcholy v prvním patře pokračujeme do druhého patra.

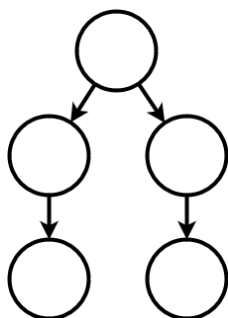
V druhém patře se nachází 2 vrcholy (3 a 5), protože ale požadujeme aby byly

správně uspořádané musí vzít vrchol 3, ten nemá potomka, do posloupnosti zapisujeme tedy 0, nakonec zbývá vrchol 5, ten potomky nemá, do posloupnosti tedy přidáme 0.

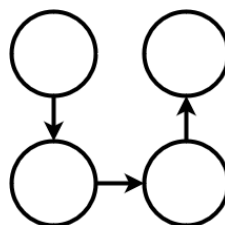
Máme posloupnost délky 9, přidáme 0 abychom měli posloupnost délky 10.

Celkem dostáváme $f_5(R) = 1101010000$.

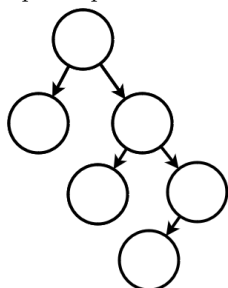
Na následujících obrázcích můžeme vidět několik dalších příkladů. V druhém řádku vidíme dva grafy, které mají různou posloupnost pouze díky různému uspořádání, pokud bychom je uvažovali jako neuspořádané orientované stromy tak by byli isomorfní.



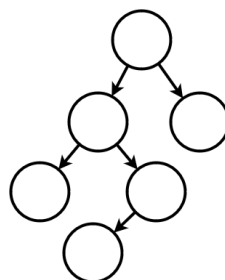
Graf s posloupností 1101010000



Graf s posloupností 10101000



Graf s posloupností 110011001000



Graf s posloupností 110110001000

f_n má zřejmě jako svůj definiční obor všechny orientované grafy s n vrcholy, protože algoritmus pro vytvoření výsledné posloupnosti který používáme funguje pro každý orientovaný strom. f_n není surjektivní, například pro posloupnost $2n$ jedniček neexistuje inverzní zobrazení.

Ukažme, že f_n vždy zobrazí do posloupnosti o délky $2n$

Důkaz. Toto plyne z pozorování, že každý člen (kromě kořene) přispěje do posloupnosti jednou číslicí 1 a jednou číslicí 0. 1 protože se vyskytuje jako potomek právě jednoho vrcholu, 0 poté co projdeme všechny jeho potomky. Jedinou výjimkou je kořen, který předka nemá a proto do posloupnosti přispěje jednou 0.

Z toho tedy máme že vrcholy kromě kořene přispějí, $2(n - 1)$ členy, kořen jedním členem a funkce samotná na konec posloupnosti přidá jednu 0. Z toho

máme

$$2(n-1) + 1 + 1 = 2n$$

□

Ukažme nyní, že f_n je injektivní.

Důkaz. Stačí ukázat, že existuje zobrazení $g_n : (b)_{i=1}^{2n} \mapsto T_n$ tak aby $g_n(f_n(x)) = x, \forall x \in T_n$, tj. že zobrazení f_n je invertibilní zleva.

Toto zobrazení ale určitě existuje, stačí posloupnost procházet zleva doprava a postupně vrcholům přidávat potomky pro každou 1. Poté co v posloupnosti narazíme na 0 tak se buď přesuneme do vrcholu, který je napravo, nebo pokud takový vrchol neexistuje tak se přesuneme do vrcholu nejvíce vlevo v dalším patře.

Pro posloupnosti které nejsou obrazem nějakého grafu z T_n podle f_n (a tedy naše inverzní funkce je pro ně špatně definovaná) definujme BŮNO (protože nás zajímá inverzní zobrazení pouze pro posloupnosti které obrazem jsou) výsledek jako následující graf $([n], \bigcup_{i=2}^n \{(1, i)\})$. □

Protože f_n je injektivní a není surjektivní, tak platí, že množina do které f_n zobrazuje je větší než definiční obor $D(f_n) = T_n$.

Počet všech binárních posloupností o velikosti $2n$ označme jako P_{2n} a platí $P_{2n} = 2^{2n} = 4^n$.

Konečně tedy platí,

$$\begin{aligned} \# \text{neisomorfních stromů s } n \text{ vrcholy} &\leq \\ &\leq \# \text{orientovaných stromů s } n \text{ vrcholy} = D(f_n) < 4^n \end{aligned}$$

□

Těžká úloha 4

Zadání

Bud' $G = (V, E)$ s minimálním stupněm $\delta(G) > \frac{2}{5}|V|$. Dokažte, že G je buď bipartitní, nebo obsahuje cyklus délky 3. Poté zkonstruuje nekonečně mnoho neizomorfních grafů $G = (V, E)$, které nejsou bipartitní, zároveň neobsahují cyklus délky 3 a zároveň splňují $\delta(G) = \frac{2}{5}|V|$

Řešení